

MM 教育方式简介

——一种崭新的数学教育方式

徐利治¹，徐沥泉^{2*}

(1. 大连理工大学数学系, 辽宁 大连 116024; 2. 无锡市教育研究中心, 江苏 无锡 214001)

(E-mail: liquanwx@163.com <http://www.5ishuxue.cn/>)

摘要: 本文介绍了运用数学方法论的观点指导数学教学的一种崭新的数学教育方式, 即应用数学的发展规律、数学的思想方法和数学中的发现、发明与创新的观点设计数学教学.

关键词: 数学方法论; MM 数学教育方式; 发现的设计 & 发现的经历.

数学分类号: 00A16

中图分类号: 010

Briefing on MM Education Way, a New Way of Mathematics Teaching

HSU Leetsch Charles¹, XU Liquan²

(1. Dept. of Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China;

2. Wuxi Education Research Center, Jiangsu, 214001, China)

(E-mail: liquanwx@163.com)

Abstract: This paper introduces a new way of mathematics teaching, applying the views of mathematical methodology that guides mathematics teaching. It is to put to use the law of mathematical development and mathematical thinking and methods, using the law of discovery, invention and innovation in mathematics, to design mathematics teaching.

Key words: MM (mathematical methodology); the way of mathematics teaching of MM; the design of discovery and the experiences of discovery

MSC(2000): 00A16

0 引言

本文介绍一种新的数学教育方式, 即运用数学方法论的观点指导数学教学, 也就是应用数学的发展规律、数学的思想方法、数学中的发现、发明和创新机制设计和改革数学教学

作者简介: 徐利治 (1920—), 男, 江苏南丰镇人, 一级教授, 中科院数学所顾问. 徐沥泉* (1946—), 通讯作者, 江苏无锡人, 特级教师, 江南大学教育学院兼职教授, 从事数学教育、数理统计和数学方法论研究.

的一种数学教学方式[1][2].

它始于 1989 年,至今已二十个年头. 它的灵魂是激发学生的创造性, 促进数学中的发现和发明. 15 年来的实践证明它的效果是好的.

MM 方式既预示着数学教学的未来, 又是一种返璞归真的数学教学方式. 它发展了 G.Polya 的数学教学思想和他的方法论模式. 在先进的理论研究和数学教学的实践之间构建了一系列的可操作变量. 具体地说就是:

在数学教学过程中, 充分发挥数学的科学技术功能和它的文化教育功能; 贯彻“教学·研究·发现”同步协调和“既教猜想又教证明”的这两条基本原理; 自觉地、恰当地操作好 8 个变量, 即数学的返璞归真教育, 数学教学中的美育, 数学的发现法教育, 数学家优秀品质教育和数学史志教育, 数学中的演绎推理, 合情推理和一般解题方法的教育; 瞄准三个具体目标, 即, 在数学教学中致力于提高学生的一般科学素养, 社会文化修养, 形成和发展他们的数学品质. 从而全面提高学生素质.

该课题于 1994 年和 2002 年分别通过了由江苏省教育委员会委托的以中国科学院院士王梓坤教授为首的专家鉴定组的鉴定并给予高度评价. 近期又有新的发展[3]~[13].

本文既有数学教学中发现的设计, 又有数学教学中发现的经验, 用以揭示“有发现的设计必有发现的经验”.

1 问题出在哪里?

人类已经进入 21 世纪. 21 世纪不仅是一个现代高新技术继续处于更大变革的新世纪, 而且是一个更侧重于研究人的发展的新世纪. 而“高新技术从本质上讲是一种数学技术”且“数学科学对于人的教育作用是非常巨大的”, “数学是人类文明的重要组成部分”.

因此, 目前世界上大多数国家都已经把数学教育作为提高国民素质的重要手段, 并且越来越认识到发展数学科学的极端重要性. 中国更应该这样, 因为“数学是中国人民擅长的科学”.

然而, 与此形成强烈反差的是: 在现代学校的基础教育中, 成千上万的差生对数学不感兴趣, 他们厌恶数学.

也许有人会说, 这都是外部原因造成的. 可是, 数学课堂上数学滋味不浓, 师生们品尝不到数学味道的精美, 更不用说到现代数学广阔原野上去领悟百花齐放、推陈出新的意境, 去汲取思考问题和解决问题的取之不尽用之不竭的丰富源泉了... 所有这些, 也硬要说成是由于数学教育的外部原因所造成的, 未免就有点迂腐.

这里我们暂不考虑数学教育的外部影响, 因为数学教育质量的提高其最终的落脚点还是要落实到数学教育内部如何采取最有效的教育方式这个核心问题上来.

那么, 什么才是最有效的数学教育方式呢?

采取实用主义的态度, 在数学教材中大量地引进日常生活中的实际例子, 行不行? 显然, 我国 20 世纪 70 年代的做法已经给我们带来了严重的损失和深刻的教训.

片面地强调数学教育的“现代化”, 对中小学的数学教材进行“公理化处理”, 行不行? 欧美等国家“新数学运动”的失败, 则使人们认识到要“回到基础去”!

一而再, 再而三地降低教材难度行不行? 把较复杂一点的内容逐步删去, 把抽象程度较高一此的内容也逐删去, 这等于是在把数学的精美内容和完美形式都逐步逐步地删去. 最后数学课本越来越薄, 配套的练习册却越来越厚, 内容越来越少, 只剩血肉, 这仍然调动不了学习主体学习数学的兴趣. 却相反, 为了迁就学生而片面降低对学生的要求, 只会纵容一种好逸恶劳和见难即退的心愿, 造成人的素质下降.

为什么一方面数学教育急需改革, 但另一方面一改就会出问题, 甚至遭到失败呢? 问题出在哪里? 怎么办? 从失败中吸取教训, 从成功中总结经验. 我们的回答是: 贯彻数学方法

论的教育方式（简称 MM 方式），全面提高学生素质。

2 这样回答行吗？

MM 方式是怎样提出来的？为什么要在数学教育中贯彻这种方式？即，它的理论依据和客观背景是什么？

2.1 第一，我们要搞清楚什么是数学方法论？

近年来，国内外一些著名数学家都致力于对数学哲学的研究。他们从本体论与认识论的角度提出了“数学是一种模式真理”的数学观。按照这种观点，数学模式在本体上具有两重性。就其内容而言具有明确的客观意义，它是思维对于客观实在的能动反应，任何数学模型都有它的现实原型；就其形式结构而言数学并非客观世界中的真实存在，而只是创造性思维。亦即理性的创造物。从前者而言，数学是人们所发现的；从后者而论，数学又是人们所发明的。而数学的每一次重大的发现和发明，都是以决定数学向本质上的崭新状态过渡的杰出成就为标记的。这中间伴随着认识论与方法论上的突破，伴随着数学思想方法的革命性的变革。有一门学问就是专门以数学的思想方法作为研究对象的，它就是数学方法论。徐利治教授指出：“数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律，数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问。”

2.2 第二，我们要搞清楚数学教育与数学方法论有什么关系？

从数学方法论观点看，数学具有两重性，它既是一门系统的演绎科学（从最后被定型的数学来看），又是一门实验性的归纳科学（从创造过程中的数学来看）。因此数学教学应充分体现数学的这两个侧面，使学生受到全面的数学教育，忽视数学的归纳性的一面是不完全的数学教育。

另外，运用数学方法论的观点和高级神经活动心理学已有的研究成果，分析数学思维，我们看到，数学思维也有两重性，一类是进行逻辑推理的抽象思维；另一类是进行合情推理或似真推理的形象思维。这后一类思维的具体表现形式是观察、实验、类比、联想、不完全归纳等。它们不仅在数学的发现过程中起着十分重要的作用，而且广泛应用于社会生活之中。因此，我们不应该把数学单纯地理解为一门工具科学，而应该把它当作一种文化形态来对待，在数学中致力于提高人们的一般文化修养。当然要充分发挥数学的这种文化教育功能，就必须采用一定的方式来组织教学。

G.Polya 曾以解题为例，说明离开似真推理，人们无法接受数学中抽象结论的道理。这个例子说的是他在证明这个不等式的时候，

$$\sum_1^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} < e \sum_1^{\infty} a_n \quad (a_n \text{ 是不全为零的非负实数})$$

他用一个等式来定义正数 $c_1 c_2 \cdots c_n = (n+1)^n$ ，从而

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &= \sum_1^{\infty} \frac{(a_1 c_1 \cdot a_2 c_2 \cdots a_n c_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} \\ &\leq \sum_1^{\infty} \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_1^{\infty} a_n c_n \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{n} < e \sum_1^{\infty} a_n \end{aligned}$$

证明本身是非常简洁而巧妙的，但是这里推理的关键是定义序列 $c_1 c_2 c_3 \cdots$ ，学生对此就

无法理解，会感到“它是突然从天而降的”，“只有作者知道这一步的目的”。这就是我们接受抽象结论的困难所在。古人云：“象显可征，虽愚不惑；形潜莫睹，虽智犹迷”，就是这个道理。因为人们无法了解到它的来源与构想，只能被动地承认其正确。若整个数学教材基本上是按这种体系编写，教师又不对它进行教学法加工，学生就只有被动地接受与理解这些法则。靠套公式，模仿例题而日复一日、年复一年地机械操练。这对他们智力水平的提高很难有成效。学生的智力得不到发展，而所学内容却不断深化，长此以往，他们就会对数学产生厌恶情绪。

G. Polya 指出,要使學生真正理解与掌握数学中的抽象结论,就必须采用一种所谓“启发式”的叙述形式,把抽象结论的来龙去脉完全剖析给学生。他以 $c_1c_2c_3\cdots$ 这个序列的发现为例,详细叙述了他是如何观察、联想、猜测到可以用平均不等式来加以证明的:

$$\sum_1^\infty (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_1^\infty \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \sum_{n=1}^\infty a_n \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k}$$

却出师不利,级数 $\sum \frac{1}{k}$ 发散,完全失败啦!然后他仔细分析了原因,发现可能是 $a_i (i=1,2,\cdots,n)$ 这些数之间差异悬殊.因为平均不等式当且仅当 a_i 全相等时等式成立,当 a_i 不全相等时,两边是不同的,而当 a_i 很不相等时,两边的差距就会更大.故想到构造补偿因子,在 a_i 之间插入 c_i 来解决矛盾:

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &= \sum_1^\infty \frac{(a_1c_1 \cdot a_2c_2 \cdots a_nc_n)^{\frac{1}{n}}}{(c_1c_2\cdots c_n)^{\frac{1}{n}}} \\ &\leq \sum_1^\infty \frac{a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n}{n(c_1c_2\cdots c_n)^{\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^\infty a_nc_n \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k(c_1c_2\cdots c_k)^{\frac{1}{k}}} \end{aligned}$$

到此,我们已不难理解,为什么要定义:

$$(c_1c_2\cdots c_k)^{\frac{1}{k}}, \text{ i.e. } c_1c_2\cdots c_k = (k+1)^k \text{ 了, 因为}$$

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^\infty \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \cdots$$

这里我们已经浓缩了 G.Polya 的探索过程。

这一典型例子基本上反映了数学中发明创造的一般过程。提示了任何真理的出现,都得经历一番磨练。说明了在失败的现实中往往蕴含了成功的全部信息,关键是能否破译事实所提供的那些无形的密码。

由此可见,学习数学的困难,并不是它本身的抽象形式;而是离开了它抽象的背景,离开了用似真推理来发现它的过程,离开了在受到挫折以后对反馈信息的分析,离开了生动活泼的创造发明的活动机制。

现在,我们似乎有更充分的理由来回答第一部分中所提出的问题了。即,为什么一方面数学教学急需改革,但另一方面一改就会出问题甚至遭到失败,而传统的教学形式虽弊病很多,却能在多次改革之后,仍立于不败之地?原因就是缺乏正确的理论指导。是数学方法论

的创立，终使人们看清了传统数学教学中弊病的根源及其解决它的正确途径。所以徐利治教授率先提出要把数学方法论的原则贯彻到数学教学中去。

3 怎样操作？

那么，到底什么是 MM 方式？怎样在数学教学中恰当而有效地组织这种方式？

3.1 如前所述，在数学教学过程中，师生自觉地遵循“教学·研究·发现”同步协调原则和“既教（学）证明又教（学）猜想”的原则；充分发挥数学的科学技术功能和文化教育功能；教师恰当地不失时机地对学生进行数学的返朴归真教育、数学的美育、数学发现法教育、数学家优秀品质教育、数学史志教育，进行数学中的合情推理、逻辑推理和一般解题方法的教学；并引导学生不断地自我增进一般科学素养，社会文化修养，形成和发展数学品质，全面提高学生素质。这就是数学方法论的数学教育方式。下面给出 MM 方式的基本操作表和指标体系表

表 1 MM 基本操作表

		数学方法论因子	可控变量（自变量）	水平	状态变量（因变量）	水平
数学方法论的教育方式	宏观操作	数学的对象及性质研究	数学返朴归真教育 密切联系生活 提倡问题解决		数学意识 应用能力	
		数学美学方法研究	数学教学中的美育 运用审美原则 引进美学机制		数学美感 审美能力	
		数学发明心理学的研究	数学发现法教育 揭示创造活动 再造心智过程		数学机智 创新能力	
		数学家成长规律的研究	数学家优秀品质教育 介绍生平事迹 分析成败缘由		科学态度 竞技能力	
		数学史与数学教育史的研究	数学史志教育 巧用数学史料 编制轶事趣闻		唯物史观 洞察能力	
		微观操作	观察 实验 归纳 类比 联想 猜测 等合理推理的方法	合理推理的教学 教（学）猜想 教（学）发现		合理推理能力 科学思维方式 形象思维能力
	数学模型法公理化 方法和抽象分析法 等演绎推理方法		逻辑推理的教学 教（学）证明 教（学）反驳		逻辑推理能力 具体事物数学化的本领	
	关系映射反演原则 波利亚解题模式等 一般解题方法研究		一般解题方法的教学 教学规则 教学策略 教学算法 教学应变		运筹布算能力 数学智力结构 综合运用能力	

注 1：“关系、映射、反演”原则是指徐利治教授的“RMI”原则；注 2：波利亚解题模式详见 G.Polya 的有关著作和他的解题表；注 3：在水平栏的每一个空格中，请用序号①或②或③或④填写您认为最合适的等级。它们分别标志着优或良或中或下的 4 个不同级别的水平，如你认为该堂数学课上无该项操作也可以不填。

3.2 把 MM 方式的实验目标进行分解, 就得到下面的指标体系表 (见表 2)。

从纵向看, 通过数学教学, 必须使学生具备一般科学素养, 提高社会文化修养, 形成和发展数学品质, 我们称之为“纵向要求集”; 从横向看, 指导语栏内给出了每一类指标所要达到的三级水平, 我们称之为“横向水平集”。

评价: 我们把纵向要求集{一般科学素养, 社会文化修养, 数学品质}和横向水平集{合格水平, 较高水平, 高级水平}的“笛卡儿乘积集”的某些子集作为 MM 方式的综合评价研究. 若一般科学素养符合指导语栏目中的全部内容, 社会文化修养和数学品质符合相应的指导语栏目中的合格水平, 我们就说实验基本成功, 并形象地说是达到了“Γ”型评价; 若一般科学素养和社会文化修养达到相应指导语的全部内容, 数学品质达到合格水平, 我们就说实验成功, 并形象地说是达到“F”型评价; 若一般科学素养, 社会文化修养, 数学品质都达到其相应指导语的全部内容, 我们就说实验取得圆满成功, 并形象地说是达到“E”型评价. (见表 2 评价示意图)

表 2 MM 指标体系表

实验指标	分指标	显示器	指导语
			①合格水平·②较高水平·③高级水平
具备一般科学素养	合理地进行思考 清楚地表述思想 有条不紊地工作	数学常识 合情推理 兴趣原则	基本掌握·掌握·牢固掌握 局部可靠·基本可靠·高度可靠 爱好学习·爱好科学·爱好数学
提高社会文化修养	行为规范 价值观念 道德情操	数学规范 数学史 数学美感	训练合格·训练良好·训练有素 了解一点·初步了解·基本了解 感受一般·感受较强·感受强烈
形成和发展数学品质	数学常识	基本知识 (含技能技巧)	识记再现·描述理解·诠释理解
	数学能力	三大能力 (含狭义应用)	初步具备·基本具备·完全具备
	数学创见	发明发现 (含广义应用)	点滴发现·较大发现·更大发现

注: ① 三大能力指数学的逻辑推理能力, 运算能力和空间想象能力.

注: ②表 2 评价示意图

实验指标	分指标	显示器			实验分指标	显示器	指导语			实验分指标	显示器	指导语				
		合格水平	较高水平	高级水平			合格水平	较高水平	高级水平			合格水平	较高水平	高级水平		
具备一般科学素养	合理地进行思考 清楚地表述思想 有条不紊地工作	数学常识	合情推理	兴趣原则	数学常识	合情推理	兴趣原则	基本掌握	掌握	牢固掌握	局部可靠	基本可靠	高度可靠	爱好学习	爱好科学	爱好数学
提高社会文化修养	行为规范 价值观念 道德情操	数学规范	数学史	数学美感	数学规范	数学史	数学美感	训练合格	训练良好	训练有素	了解一点	初步了解	基本了解	感受一般	感受较强	感受强烈
形成和发展数学品质	数学常识 数学能力 数学创见	基本知识 (含技能技巧)	三大能力 (含狭义应用)	发明发现 (含广义应用)	基本知识 (含技能技巧)	三大能力 (含狭义应用)	发明发现 (含广义应用)	识记再现	描述理解	诠释理解	初步具备	基本具备	完全具备	点滴发现	较大发现	更大发现

4 效果如何?

有发现的设计必有发现的经历. MM 方式的出现, 一改过去学生学习的被动局面, 使他们对既教证明又教猜想的探索规律产生浓厚兴趣, 整个教学过程也就融入发明发现的主旋律之中. 现择其一二.

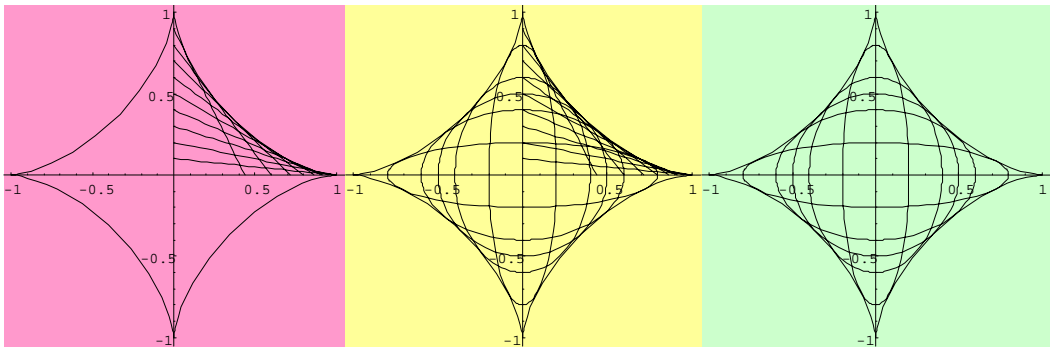
4.1 平面解析几何中有一个我们都熟悉的问题, 线段 AB 的两个端点在直角坐标系的两坐标轴上滑动, 求线段中点的轨迹.

显然, 它的轨迹是一个圆, 但是问题在于能否推陈出新. MM 方式要求我们加强一般解

题方法的教学，要求我们尽可能地把解题过程及其结果放在不断探索、试验、总结、回顾并不断深化的数学科学知识体系中去考察。为此，我们设计了一个小实验，让学生仔细观察并验证其结果。

比如用一根教棒，使其两个端点在黑板的内角边缘上滑动。

谁知这一个十分简单的实验却带来了出人意料的收获，发现了“星形线作为直线族与椭圆族的公包络”这样一个鲜为人知的事实。这一发现不仅把分布在中学数学中看来似乎是零星的、分散的、孤立的而实际上是相互联系的习题，例如线段的中点轨迹、圆、椭圆与直线的参数方程，椭圆规的构造及原理，星形线等等串联起来，构成一个整体，把由方程求曲线和由曲线求方程，曲线的切线的概念，以及求切线和切线长等许多中学数学知识融为一体；并且在勾通初等数学和高等数学之间的连接渠道方面也做了一些穿针引线的作用，这里只给出如下的直观图示。



4.1 图

4.2 在数学教学中适当地组织抽象分析法的教学，其基本措施有两条。一条是引导学生从具体素材中直接抽象出数学模型，即把非数学问题数学化；二是引导学生对前人或他人所构造的数学模型（如教材中的定理公式等）进一步理论化。下面我们给出运用抽象分析法系统构建数学模型而达到数学中的再创造再发现的又一实例。

基于对初等代数中的“算术平均数和几何平均数”等有关定理的探讨，我们把它推广到“幂平均函数及其平均不等式”这一更为一般的形式。我们把函数

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^x \right)^{\frac{1}{x}} \\ \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \end{cases} \quad \& \quad f(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sum_{i=1}^n q_i a_i^x}{\sum_{i=1}^n q_i} \right]^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ \left(\prod_{i=1}^n a_i^{q_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n q_i}} & x = 0 \end{cases}$$

分别定义为幂平均函数和加权幂平均函数（这里 a_i 为不全相等的正数， $q_i > 0$ ）。利用其幂级数展开式

$$f(x) = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} e^{\left[\frac{x}{2n} \sum_{i=1}^n \ln^2 a_i - \frac{x}{2n^2} \left(\sum_{i=1}^n \ln a_i \right)^2 + o(x) \right]} \quad (x \neq 0),$$

并构造一个辅助函数 $\phi(y) = y \ln ny$ ($y > 0$)，详细讨论了幂平均函数的有界性、连

续性和一致连续性、可导性及其导函数的连续性、单调性等等，从而完成了“幂平均函数及其平均不等式”这一数学模型的综合构建，几乎用到了初等微积分学的全部重要知识。

4.3 再看一个先由经验归纳再用抽象分析法达到数学中又一发现的例子。

初中一年级的一堂代数课上，师生正在共同讨论一个火车追及问题，突然，一名学生向老师提出了一个似乎与此无关的问题：

3 点钟之后又过多少时间，手表上的分针和时针又互相垂直？

生活中处处有数学。老师意识到这是增强学生的数学意识、提高学生兴趣的极好时机。鼓励这位学生课后去思考。因为火车追及问题是直线上的追及问题，而后者是圆周上的追及问题。

课后，我们从“某时刻起多久钟表之长短针（分针和时针）互相垂直”这一更具一般性的问题入手，通过经验归纳，得到公式：

$$t = \frac{360}{11} \left\{ \left[\frac{11T - 180}{360} \right] + \frac{3}{2} \right\} - T \quad \text{or} \quad t = \frac{360}{11} \left\{ 1 - \left(\frac{11T - 180}{360} \right) \right\} \quad \textcircled{1}$$

其中 T 的单位是分钟， $\left[\frac{11T - 180}{360} \right]$ 和 $\left(\frac{11T - 180}{360} \right)$ 分别表示该数的最大整数部分和小数部分。公式①就是已知变量 T （某时刻）和未知变量 t （多长时间）之间的函数关系，

记作 $t(T)$ 。尔后经过证明，再把它展成 Fourier 级数：

$$t = \frac{180}{11} + \frac{360}{\pi} \sum \frac{(-1)^k \sin \frac{1}{180} k \pi T}{k}, T \in K \left((2K - 1) \frac{180}{11}, (2K + 1) \frac{180}{11} \right) k \in N \quad \textcircled{2}$$

由①和②，并把 $T = \frac{90}{11}, \frac{60}{11}, \frac{45}{11}, \dots$ 等一些具体的数代入，可推出：

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots}{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots} \quad \text{或} \quad \sqrt{2} = \frac{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{22} + \frac{1}{26} + \frac{1}{27} - \frac{1}{33} + \frac{1}{34} - \frac{1}{38} + \frac{1}{39} - \frac{1}{45} - \frac{1}{46} + \dots}{\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{35} + \frac{1}{37} - \frac{1}{41} + \frac{1}{43} - \frac{1}{47} + \dots}$$

等等。进而，可把无理数 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 与 π 和 e 统一在如下的两个优美表达式之中[2]：

$$\sqrt{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \right) = \exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+2} \right)$$

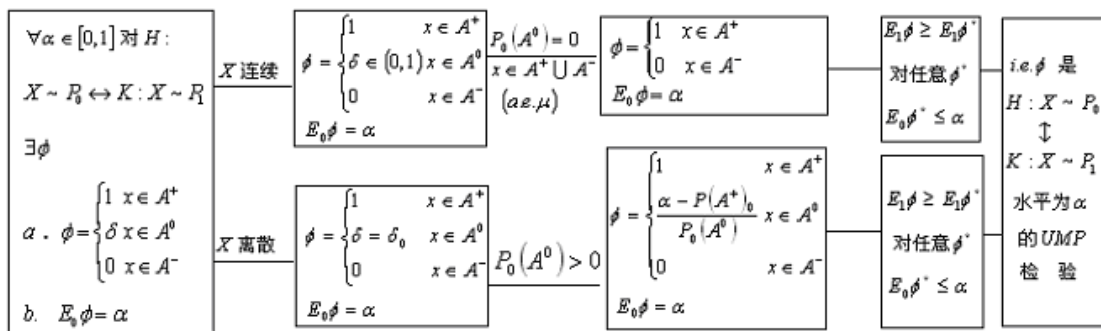
$$\sqrt{3} = \frac{9}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} \right)$$

综上所述，MM 方式一方面彻底改变了学生学习的被动局面，为他们提供了正确的思想方法和学习方法；另一方面在方法论的意义上，中学数学不再局限于初等数学这一小块弹丸之地，而与整个数学领域连成一片。这就为学生吸取数学科学中的现代思想，自我增进现代

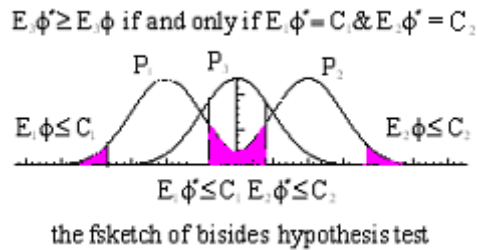
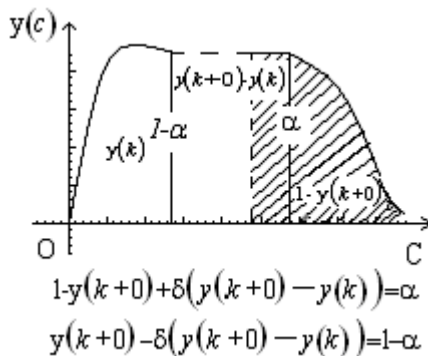
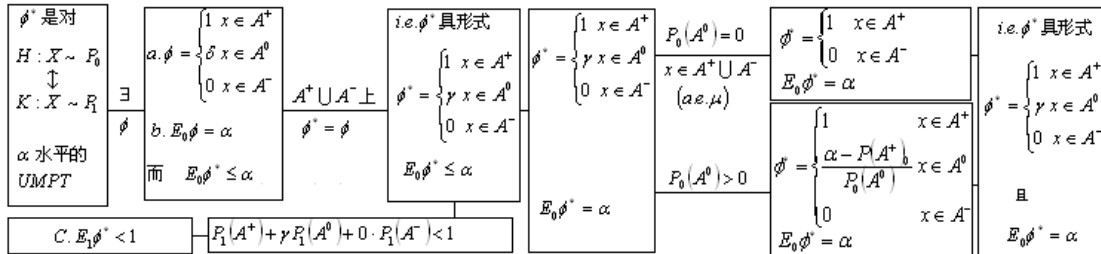
科学技术的文化素养开辟了一块良好的运动场。

4.4 最后举一个在数理统计学中的例子。徐利治教授说过，对一条定理，如果只是在逻辑上能够证明还不算真懂，还必须在头脑里留下直观的印象才算真正搞清楚。数理统计学中有一条刻画一致最大功效检验函数 ϕ 的“Neyman-Pearson 基本引理”，我们从直觉与逻辑这两个方面对它进行了分析，既给出了 ϕ 的随机化检验形式，运用测度论的观点论证了 N-P 充要条件；同时又给出了它的直观的图象表示。较之以往的 N-P 引理，其形式更为完美，证明更加严谨，且在推广的 N-P 引理中扩大了检验函数的集类 F_ϕ 。下面给出奈曼结构的逻辑框架和它的直观图示：

奈曼条件的充分性框架



奈曼条件的必要性框架



(4.4 图)

参考文献:

- [1] 徐利治. 徐利治论数学方法学[M]. 济南: 山东教育出版社, 2001,12.
- [2] 徐沥泉. 教学·研究·发现——MM 方式演绎[M]. 北京: 科学出版社, 2003,03.

- [3] 杨宪立. MM(HT)教育方式与概率统计教学[J]. 数学教育学报, 2000 年 11 月:87-90.
- [4] 邹泽民. MM 方式下常微分方程教学实验研究[J]. 玉林师范学院学报(自然科学), 2002 年 3 月: 4-6.
- [5] 李宗铎, 向昭红. 浅谈数学的特点与数学教学改革[J]. 长沙: 数学理论与应用, 2002 年 12 月: 5-8.
- [6] 明清河. 高师数学“方法论教学法”的实践与探索[J]. 曲阜师范大学学报, 2003 年 4 月: 106-108.
- [7] 叶立军. 高初结合在数学教学中几个应用及其教学对策[J]. 甘肃联合大学学报(自然科学版), 2005 年 10 月: 60-63.
- [8] 运怀立, 杨 之. MM 教育方式与当代数学教育[J]. 数学教育学报, 2005 年 11 月: 74-77
- [9] 侯维民, 谢保利等. 论用“MM 方式”指导高师数学精品课程建设[J]. 天水师范学院学报, 2006 年 3 月: 72-75.
- [10] 郭运瑞, 刘娟等. MM 教学方式在数列极限教学中的应用[J]. 河南职业技术师范学院学报, 2006 年 5 月: 124-126.
- [11] 王晓峰, 叶云. 探讨科学的工程训练教学方法[C]. 中北大学材料科学与工程系, 华北东北金工实习年会, 2006 年 8 月.
- [12] 林夏水. 从 MM 教育方式到 TEC 教学方式[J]. 数学教育学报, 2007 年 2 月: 1-3.
- [13] 郑兆顺. “MM(HT)”实验是高师数学教育改革的成功尝试[J]. 数学教育学报, 2007 年 5 月: 42-44.